

Ex 1 : a) Pour tout réel x différent de 1, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$
 et $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$
 $a = 6 \quad f(a) = \frac{38}{5} \quad f'(x) = \frac{23}{25}$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en A d'abscisse 6 est : $y = f'(6)(x - 6) + f(6)$

Soit : $y = \frac{23}{25}x - \frac{23}{25} \times 6 + \frac{38}{5} \quad y = \frac{23}{25}x -$

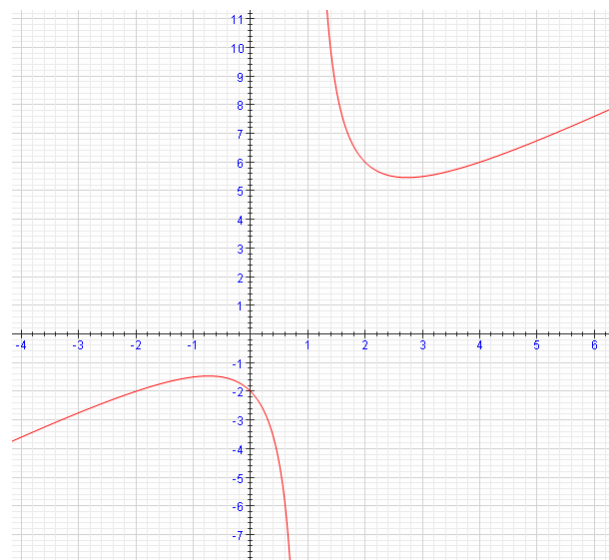
b) C_f admet le point I (1 ; 2) comme centre de symétrie ssi pour tout réel t , différent de zéro, $\frac{f(1-t) + f(1+t)}{2} = 2$

Pour tout t , différent de zéro, $f(1-t) = \frac{(1-t)^2 + 2}{1-t-1} = \frac{t^2 - 2t + 3}{-t} = \frac{-t^2 + 2t - 3}{t}$

et $f(1+t) = \frac{(1+t)^2 + 2}{1+t-1} = \frac{t^2 + 2t + 3}{t}$

Par conséquent $f(1-t) + f(1+t) = \frac{4t}{t} = 4$

I est donc bien centre de symétrie de C_f



Ex 2 :

1) Pour tout réel x de D_f , $-x$ appartient à $[-2; 2]$ et $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 - 1 = f(x)$
 donc la fonction f est paire et

sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

2) Pour tout x de D_f , $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

f' s'annule pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$

Tableau de signe de f' sur $[-2; 2]$

x	-2	-1	0	1	2
$4x$	-	-	+	+	+
$x^2 - 1$	+	-	-	-	+
$f'(x)$	-	+	-	+	+

Tableau de variation de f

x	-2	-1	0	1	2
f	7	-2	-1	-2	7

La dérivée s'annule en changeant de signe en -1, 0 et 1, donc f admet un extremum en chacune de ces valeurs.

Sur $[-2; 2]$ f admet -1 comme maximum local atteint en 0, 7 comme

maximum absolu atteint en -2 et en 2 et -3 comme minimum absolu atteint en -1 et en 1

La courbe admet une tangente horizontale au points A d'abscisse -1, B d'abscisse 0 et C d'abscisse 1

3) Sur $[0; 1]$ f est définie, dérivable et strictement décroissante, $f(0) = -1$ et $f(1) = -2$, donc f strictement négative et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[0; 1]$

Sur $[1; 2]$ f est définie, dérivable et strictement croissante, $f(1) = -2$ et $f(2) = 7$

Comme 0 appartient à $[-2; 7]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$

Conclusion : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; 2]$ $\alpha \approx 1,55$ à 10^{-2} près par défaut

4) Comme f est paire, f s'annule en α et en $-\alpha$, on déduit du tableau de variation le signe de f sur $[-2; 2]$

$f > 0$ sur $[-2; -\alpha] \cup [\alpha; 2]$ et $f < 0$ sur $]-\alpha; \alpha[$

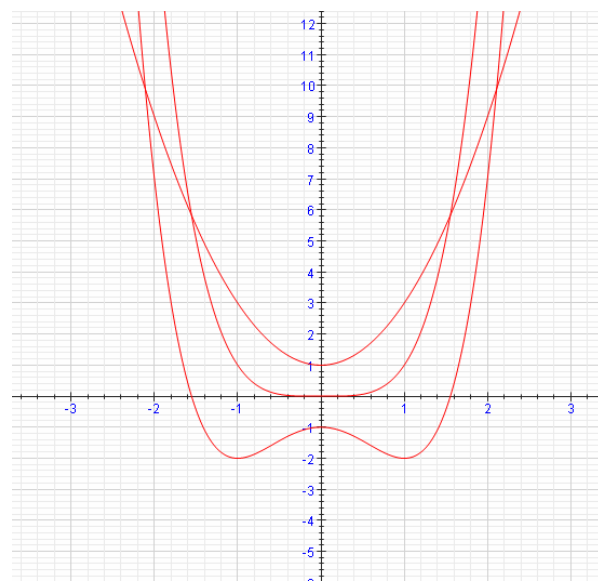
5) On peut remarquer que le signe de f correspond au signe de la différence des fonctions représentées par les courbes P et C

Pour tout réel x , $f(x) = x^4 - (2x^2 + 1)$

Donc la position relative de ces deux courbes se déduit de ce signe

C « au dessus » de P sur $[-2; -\alpha] \cup [\alpha; 2]$ et C « au dessous » de P sur $]-\alpha; \alpha[$

P et C admettent deux points d'intersection, les points d'abscisses α et $-\alpha$



Ex 3 : on peut remarquer que lorsque g est positive, f est croissante et vice-versa, mais le contraire n'est pas vrai
Donc à priori, g est la dérivée de f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
g (x)	-	0	+	0	-
f	0 4				

A est le point de C d'abscisse 0, donc la tangente en A à C a pour coefficient directeur le nombre dérivé de f en 0, soit $g(0) = 3$

