Problèmes du second degré — Activités préparatoires

<u>Activité 1</u> : de l'intérêt des différentes écritures d'un polynôme du second degré

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = x^2 + 6x - 7$ (forme A)

1) Démontrer que l'on peut écrire : $f(x) = (x + 3)^2 - 16$ (forme B) ou $f(x) = (x - 1)(x + 7)$ (forme C)

2) En précisant chaque fois la forme de f(x) la plus adaptée au calcul, déterminer :

$$f(-7),\ f(-3),\ f(0) \text{ et } f(\sqrt{7})$$

3) Résoudre les trois équations suivantes en précisant dans chaque cas la forme de f (x) la plus adaptée au calcul :

a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = -7$ c) $f(x) = -12$

4) En utilisant la forme de f(x) utilisée, déterminer la valeur de x pour laquelle f atteint son minimum.

5) La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f. Placer tous les points correspondant à une résolution graphique des questions 3 et 4.

On appellera D et E les points correspondant à la lecture des résultats du 3.a) ; F et G ceux correspondant au 3.b) ; M et N ceux correspondant au 3.c) et H celui correspondant à la question 4.

6) a) Passage de la forme A à la forme B

On considère les deux premiers termes de l'expression de la forme A : $x^2 + 6x$, et on cherche à les écrire comme le début du développement d'une somme au carré.

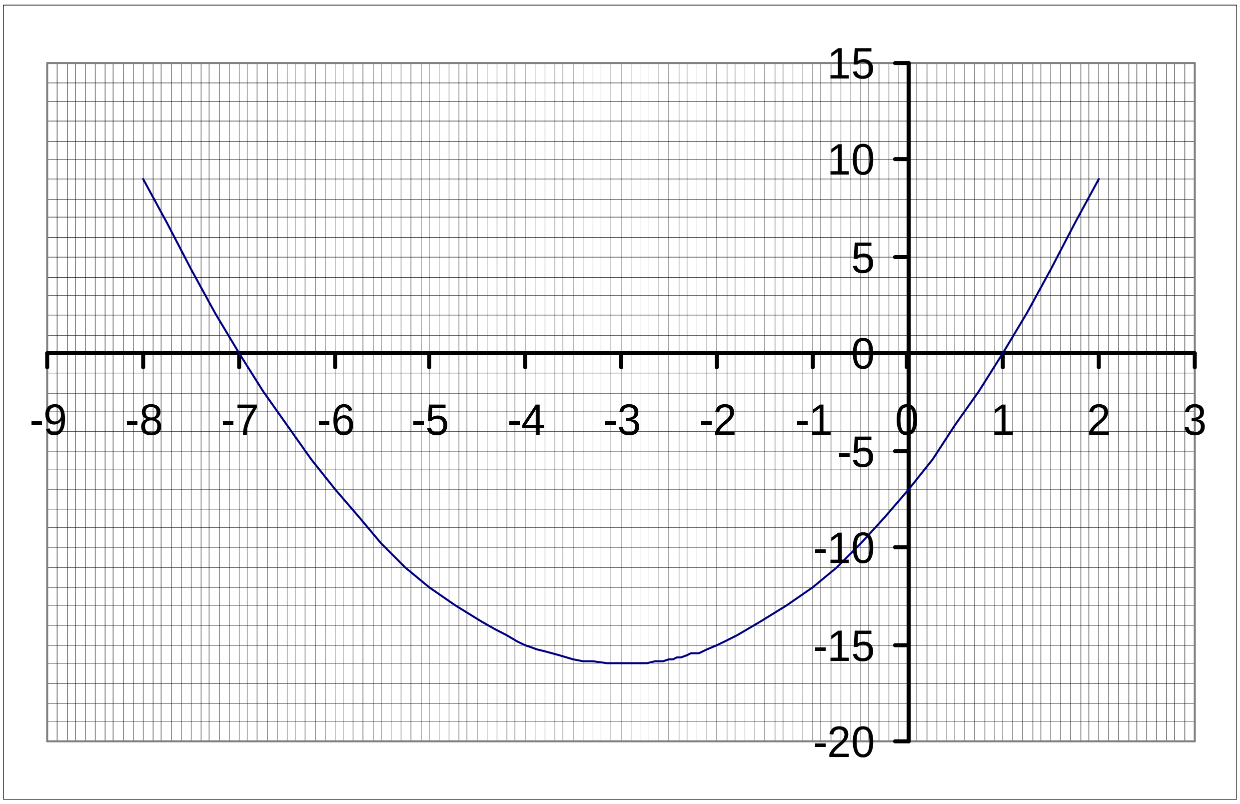
Recopier et compléter sur votre feuille : $x^2 + 6x + \ldots\ldots = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^2$

On en déduit l'écriture suivante : $x^2 + 6x = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^2 - \ldots\ldots$

On remplace alors $x^2 + 6x$ dans l'expression A. Montrer que l'on obtient alors la forme B.

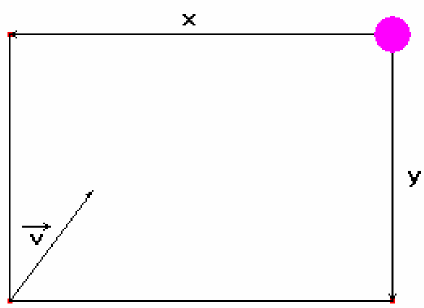
b) Passage de la forme B à la forme C.

Reconnaître dans la forme B la forme développée d'un produit remarquable. En déduire la factorisation de f (x).



<u>Activité 2</u> : Des problèmes du second degré sur un terrain de golf

Une balle de golf est frappée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v}$ qui forme un angle α avec l'horizontale. On appelle y la hauteur atteinte par la balle quand celle-ci est située à une distance x du point où elle a été frappée, distance mesurée au sol (voir figure ci-dessous)



On admet que la balle décrit une parabole d'équation : $y = -\dfrac{g}{2(v\cos\alpha)^2}x^2 + \tan\alpha\, x$

où g est l'accélération de la pesanteur et v est la norme de $\overrightarrow{v}$

On prend ici $g = 10$ m.s^{-1}, $v = 50$ m.s^{-1} et $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ rad

1) Déterminer l'équation de la parabole décrite par la balle.
2) Quelle est la hauteur atteinte par la balle quand elle se trouve à une distance x = 20 m de l'endroit où elle a été tirée ?
3) A 35 m du point de départ de la balle se trouve un arbre, dont la hauteur est égale à 25 m. La balle passera-t-elle au dessus de l'arbre ?

4.a) Factoriser $-\dfrac{1}{250}x^2 + x$

b) Résoudre l'équation : $-\dfrac{1}{250}x^2 + x = 0$

c) A quelle distance x de l'endroit où elle a été tirée, la balle retombera-t-elle ?

5.a) Vérifier que le forme factorisée de $-\dfrac{1}{250}x^2 + x - 62{,}5$ est $-\dfrac{1}{250}(x - 125)^2$

b) Résoudre l'équation $-\dfrac{1}{250}x^2 + x - 62{,}5 = 0$

c) Montrer que la balle atteint la hauteur de 62,5 m et préciser à quelle distance x de son point de départ elle se trouve alors. Expliquer enfin pourquoi cette hauteur est la hauteur maximale atteinte par la balle

6) Traduire chacune des questions suivantes par une équation ou une inéquation qu'on ne demande pas de résoudre :
a) A quelles distances x de son point de départ la balle est-elle située quand elle est à la hauteur de 40 m ?
b) Pour quelles distances x du point de départ la hauteur de la balle est-elle au-dessus de 50 m ?

I Equation du second degré

1) Définition

Définition On appelle **polynôme du second degré** toute expression de la forme a x^2 + bx + c, où a, b, c sont trois réels avec a ≠ 0
On appelle **équation du second degré** toute équation qui peut être écrite sous la forme a x^2 + bx + c =0 , où a, b, c sont trois réels et a ≠ 0
Toute solution de cette équation est appelée **racine** ou **zéro** du polynôme $ax^2 + bx + c$

2) Forme canonique

Définition : on appelle **forme canonique** de P(x) = $ax^2 + bx + c$ toute écriture de P(x) dans laquelle la variable x n'apparaît qu'une fois

Méthode pour écrire un polynôme du second degré sous la forme canonique

Cas général
Soit le polynôme P(x) = $ax^2 + bx + c$, où a ≠ 0
On met a en facteur
Pour tout réel x, P(x) =……………………………

On considère $x^2 + \frac{b}{a}x$ comme le début d'un carré :

$x^2 + \frac{b}{a}x$ + ……..= (…….+……..)² et on obtient :

$x^2 + \frac{b}{a}x$ = (…….+……..)² - ………..

On reporte dans l'expression de P : pour tout réel x,
$P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$

On regroupe alors les termes constants et on les réduit au même dénominateurs : pour tout réel x,
$P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$

Exemple : Appliquer la méthode ci-contre au polynôme :
$R(x) = 2x^2 - 9x - 5$

Propriété : $P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$ est une **forme canonique** de P(x) = $ax^2 + bx + c$

3) Factorisation des polynômes du second degré et résolution des équations du second degré

Polynômes particuliers
On considère les polynômes du second degré n'ayant que deux termes : P(x) = $ax^2 + bx$ ou P(x) = $ax^2 + c$ avec a ≠ 0

Exemple : Soit $P(x) = 2x^2 + x$
Factoriser P(x)

Résoudre P(x) = 0

Cas général : Soit P(x) = $ax^2 + bx$, avec a ≠ 0

Factoriser P(x)

Résoudre P(x) = 0

Exemple : Soit $P(x) = 2x^2 - 3$
Factoriser P(x)

Résoudre P(x) = 0

Soit $P(x) = x^2 + 4$
Factoriser P(x)

Résoudre P(x) = 0

Cas général : Soit P(x) = $ax^2 + c$, avec a ≠ 0
P(x) = a (……+……)
Si $\frac{c}{a}$ est strictement positif alors P(x) ne se factorise pas et P(x) = 0 n'a pas de solution
Si $\frac{c}{a}$ est négatif ou nul, alors $P(x) = a\,(x + \sqrt{-\frac{c}{a}})\,(x - \sqrt{-\frac{c}{a}})$
P(x) = 0 admet deux solutions $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ et $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Cas général :

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

On reprend la forme canonique de P(x) : $a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$

La factorisation et l'existence de solutions à l'équation P(x) = 0 **dépendent** du signe de $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, c'est-à-dire **du signe de $b^2 - 4ac$**

Ce nombre joue un rôle important, on l'appelle **discriminant** du polynôme et on note **$\Delta = b^2 - 4ac$**

La forme canonique de P(x) s'écrit alors : $P(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

1er cas : $\Delta > 0$

Δ est le carré de $\sqrt{\Delta}$, donc $\frac{\Delta}{4a^2} = (\ldots\ldots\ldots)^2$ et $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est de la forme $A^2 - B^2$

Factoriser P(x) et montrer que $P(x) = a (x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}) (x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a})$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$ et $\Delta > 0$) a donc exactement deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et le polynôme P se factorise sous la forme : $P(x) = a (x – x_1) (x – x_2)$

2ème cas : $\Delta = 0$

Le polynôme s'écrit $P(x) = a (x + \frac{b}{2a})^2$, qui est une forme factorisée

P(x) = 0 équivalent à ……………=0 Cette équation admet une seule solution : $x_0 =$ ………

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$ et $\Delta = 0$) a une solution (dite solution double): $x_0 = - \frac{b}{2a}$

et le polynôme P se factorise sous la forme : $P(x) = a (x – x_0)^2$

3ème cas : $\Delta < 0$

Le polynôme s'écrit $P(x) = a [(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

Ce polynôme ne se factorise pas car l'expression entre crochets est strictement positive, et l'équation P(x) = 0 n'admet pas de solution dans IR

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$ et $\Delta < 0$) n'admet pas de solution dans IR et le polynôme ne se factorise pas

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c trois réels et $a \neq 0$
On appelle discriminant de ce polynôme, et on note Δ , le nombre : $\Delta = b^2 - 4ac$

Signe de Δ	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	2 solutions réelles distinctes : x_1 et x_2 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a (x – x_1) (x – x_2)$
$\Delta = 0$	Une solution réelle double : $x_0 = - \frac{b}{2a}$	$a (x – x_0)^2$
$\Delta < 0$	Pas de solution dans IR	P(x) ne peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré

Exercice : Dans chaque cas, résoudre P(x) = 0, puis factoriser P(x).

a) $P(x) = x^2 + 2x – 8$ b) $P(x) = 3x^2 + x + 1$ c) $P(x) = \frac{1}{2} x^2 + 2x + 2$ d) $P(x) = 10x^2 - 17x + 3$ e) $P(x) = 2x^2 - 3x + 10$ f) $P(x) = \frac{1}{3} x^2 - 6x + 27$

4) Somme et produit des racines d'un polynôme du second degré

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont trois réels et $a \neq 0$

Si P admet deux racines, distinctes ou confondues, la somme de ces racines est égale à $– \frac{b}{a}$ le produit de ces racines est égal à $\frac{c}{a}$

Remarque : Ce résultat fournit un moyen rapide de vérifier la justesse des solutions d'une équation du second degré . Cela permet aussi de déterminer la deuxième solution quand il y a une évidence.

Exemple : résoudre $137x^2 - x – 136 = 0$, pour cela chercher une solution évidente

II Signe d'un polynôme du second degré

Cas général

Soit le polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Si $\Delta < 0$

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$, donc $\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$

On en déduit que :

pour tout réel x, P(x) est du signe de a

Si $\Delta = 0$

P(x) a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$

et on peut écrire $P(x) = a(x - x_0)^2$

On en déduit que :

pour tout réel x, P(x) est du signe de a et $P(x_0) = 0$

Si $\Delta > 0$

P(x) a deux racines distinctes x_1 et x_2 et on peut écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

On peut alors établir le tableau de signes suivant, en supposant que $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
$x - x_1$			
$x - x_2$			
$(x - x_1)(x - x_2)$			
$a(x - x_1)(x - x_2)$			

P(x) est du signe de a pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$
P(x) est du signe opposé à celui de a pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]x_1 ; x_2[$

Exemple 1 : On étudie le signe de
$P(x) = 2x^2 + 8x + 11$

$\Delta =$

Forme canonique de P
P(x) = 2 (……………)= 2[(x +…..)² +…..)]
Pour tout réel x , P(x) est …………………………

Exemple 2 : On étudie le signe de
$P(x) = -3x^2 + 4x - \frac{4}{3}$

$\Delta =$

Forme factorisée de P(x) =……………………

Pour tout réel x ≠ ….. , P(x) est ……………………

Exemple 3 : On étudie le signe de

$P(x) = 2x^2 - x - 3$

$\Delta =$

Forme factorisée de P(x) =…………………………..

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$

Conclure :…………………………………………..
…………………………………………………………

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
Si $\Delta < 0$ alors, pour tout réel x, P(x) est du signe de a
Si $\Delta = 0$ alors, P s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ et pour tout réel $x \neq -\frac{b}{a}$, P(x) est du signe de a
Si $\Delta > 0$ alors P a deux racines x_1 et x_2, $x_1 < x_2$
P (x) est du signe de a pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$
P(x) est du signe opposé à celui de a pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle $]x_1 ; x_2[$

Exercice d'application : Etudier les signes des polynômes : $P(x) = 2x^2 + 9x - 35$, $Q(x) = -x^2 + 2x - 4$ et $R(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$